「百萬名車」vs.「腳踏車」？

-- 別被機率給騙了！

遊戲開始

假設你現在參加一個電視台的現場遊戲，獎品是一輛百萬名車。
節目主持人給你看現場有三扇門，並告訴你說：
其中一扇門的後面是百萬名車，另外兩扇門後面則是安慰獎腳踏車一輛。
他請你選擇其中一扇門，等你選定之後，他卻不直接揭曉答案，
事實上主持人知道真正的百萬名車在哪一扇門後面，
但是他故意先打開其中一扇沒有被選中的門，門後是一部腳踏車，
現場剩下兩扇門，而百萬名車就在其中一扇門後面，
這時候主持人問你：「你要不要換？」
聰明的讀者，你「換」還是「不換」呢？

這是一道有名的「三門問題」（The Monty Hall Problem）[1]、[註1]，考驗著一般人對機率的直覺是否正確。這個遊戲一開始有三扇門可以任意選，所以每一扇門猜中大獎的機率都是三分之一，但是當主持人打開其中一扇門後，只剩下兩扇門可以選，這個時候每一扇門猜中的機率各是二分之一嗎？（這個遊戲沒有作假，也不能打 pass，請不要腦筋急轉彎哦！）

且讓我們來猜猜看吧！

機率不是固定不變的

在學校裡我們都學過簡單的機率，以丟硬幣來說，丟出正面或反面的機率各為二分之一；如果丟一顆公平的骰子，則點數 1、2、3、4、5、6 出現的機率就會各是六分之一；再換成一副完整的撲克牌，抽出一張點數為 10 的牌機率則是十三分之一。

好了，因為數學課教我們的機率是如此簡單，以致於一般人便誤以為機率只是眼前看到的可能性，而忽略了前提條件一旦改變，或者事件前後有所關聯，機率的狀態其實也會跟著改變的。先舉一個國內的例子來說：

幾年前國內電視綜藝節目曾經有一個「猜數字」遊戲，主持人手上握有一組 1 到 100 之間的數字，然後讓來賓在 30 秒內猜這個數字，每次猜錯時，主持人會提示你應該再「大一點」或「小一點」，你覺得這樣容易猜嗎？（請讀者在讀下一段文字之前先找個好朋友試試看吧！）任何一個數字猜中的機率只有百分之一，30 秒時間頂多猜個 20 次吧（每次猜完還要等主持人回答你才能再猜下去），

如果你是胡亂猜的話，的確機率是很低的。筆者當時連續觀賞了好幾個禮拜，從來沒有一次來賓可以在三十秒內猜到，大家都認爲猜中的機率太低了（即使有主持人的提示）。

其實這個遊戲非常容易猜，你只要運用「折半」的技巧[註2]，縮小每次猜測的範圍，第一次猜的數字猜中機率只有百分之一，但是第二次猜的數字猜中的機率就提高爲五十分之一了，第三次猜的數字猜中機率更提高到二十五分之一，只要掌握「折半」的技巧，通常都可以在七次以內猜中數字，花費時間不到 20 秒。

爲什麼不是每個數字猜中機率都是百分之一呢？這就牽涉到機率問題中的「樣本空間」（指所有可能的情況），當前提條件狀況改變（或增加新的資訊）時，樣本空間就會改變，原來的機率也會跟著改變，這就是「條件機率」的概念。

「條件機率」是什麼？

我們在生活中經常被習慣性的直覺所矇騙，而忘記考慮清楚問題的前提。舉一個國中生都會的數學題目：我們都知道自然數中有一半是奇數（1、3、5、7、9、11…），另一半是偶數（2、4、6、8、10、12…），如果我問你「從 1 到 10 的自然數中抽出一個數字是偶數的機率是多少？」相信大家都會不約而同地回答：「二分之一呀！」那如果是「從 1 到 10 的自然數中抽出一個完全平方數是偶數的機率是多少？」很多人也會不假思索地回答：「當然也是二分之一呀！」如果我繼續再問「從 1 到 10 的自然數中抽出一個質數是偶數的機率是多少？」，可能還是會有人回答說：「還是二分之一呀！」

因爲奇數與偶數各半的經驗對我們來說太熟悉了，只要是很多不確定的數字要我們猜測，我們很容易就誤以爲那些可能的數字也是奇數和偶數各半吧！同樣是從 1 到 10 的自然數中抽出，第一個問題沒有特別條件，其樣本空間是{1、2、3、4、5、6、7、8、9、10}，每一個數字被抽到的機率都是十分之一，所以奇數偶數各有五種可能，抽到偶數的機率當然是二分之一；第二個問題就沒那麼簡單了，因爲 1 到 10 的自然數中只有三個完全平方數（$1=1^2$、$4=2^2$、$9=3^2$），此時樣本空間變成{1、4、9}，所以抽到偶數的機率只有三分之一而已；第三個問題也不一樣，因爲 1 到 10 的自然數中只有四個質數（2、3、5、7），此時樣本空間又變成{2、3、5、7}，所以抽到偶數的機率只有四分之一。

我們常常在面對不確定的情境時，未經仔細思索，即以粗糙的直覺觀念帶過，因此容易造成誤解或錯失良機。實際生活中，即使是專業的領域，也還是偶爾會發生機率的誤用。

機率的誤用

根據條件機率理論來說，「假如 B 已經發生而 A 又同時發生」的機率，並不等

於「假如 A 已經發生而 B 又同時發生」的機率[註3]。很多專業領域沒有考慮到這一點，因而犯了一些倒置錯誤。舉一個醫學檢驗上常發生的錯誤推論[2]：

假設 X 先生去醫院進行愛滋病毒（HIV）篩檢，報告顯示爲陽性，那麼你會如何解讀 X 先生感染愛滋的機率呢？根據美國疾病管制中心的數據[3]，每 10000 個接受 HIV 篩檢的男性中，差不多有 1 人確實感染愛滋病，「假陰性」（指檢驗呈陰性卻是愛滋帶原者，也就是已感染卻沒有被驗出來）的機率幾乎爲 0，而「假陽性」（指檢驗呈陽性而實際並不是愛滋帶原者，通常是未知原因造成的誤檢）的比率約爲千分之一（大約 10 個人），剩下的人（9989 人）檢驗結果都呈陰性。篩檢結果人數統計詳如表一所示：

表一：HIV 篩檢結果人數比率

	陽性	陰性
帶原者（已感染）	1 人	0 人
非帶原（未感染）	10 人	9989 人

← 錯誤解讀

↑ 正確解讀

如果是粗心的醫生可能會解讀成「X 先生檢驗的結果呈陽性，而檢驗結果錯誤的機率，也就是沒有感染的機率只有千分之一（ $\frac{10}{9989+10}=0.001$ ）」，聽起來好像誤檢的可能性很低，幾乎可以認定 X 先生已經受到感染了。其實正確的解讀應該是「X 先生檢驗的結果呈陽性，但實際上沒有感染的機率高達百分之九十以上（ $\frac{10}{1+10}=0.909$ ）」，通常醫生會建議再做第二次複檢，並輔以其他的診斷措施。爲什麼一樣的統計數字，解讀起來會有這麼大的差別呢？

在這個例子中，「X 先生檢驗的結果呈陽性」是已知的，而 X 先生是否爲帶原者（感染愛滋）則是未知的，我們不能把「假如 X 先生沒有感染愛滋，而檢驗爲陽性」的機率和「假如 X 先生檢驗爲陽性，而沒有感染愛滋」的機率混爲一談，這是不一樣的命題。

如何聰明獲得百萬名車？

了解條件機率的意義之後，我們再回頭來看看一開始所說的遊戲，應該運用什麼策略比較容易贏得百萬名車呢？

首先假設我們選擇了 1 號門，並且決定「不換」，則贏得百萬名車的機率就是「百萬名車剛好也在 1 號門的機率」，此時不論主持人打開 2 號門或 3 號門，猜

中的機率與原來三扇門選擇的機率是一樣的，也就是三分之一。（較詳細的推論請見註 4）

相對的，我們選擇了 1 號門，同時決定「換」，則贏得百萬名車的機率變成：「百萬名車在 2 號門的機率」（這時候主持人一定會打開 3 號門）與「百萬名車在 3 號門的機率」（這時候主持人一定會打開 2 號門）的和，也就是三分之二。（較詳細的推論請見註 5）

因爲主持人在推開某一扇安慰獎腳踏車的時候，就已經排除掉一些未知情境，只有剛好你第一次就選中百萬名車的時候（三分之一的機會），選擇「不換」對你是有利的，另外的兩種狀況（你第一次選中的是腳踏車），主持人一定會打開另一扇腳踏車的門，留下百萬名車的那扇門，這時候選擇「換」對你是有利的。也就是說，沒被打開的另一扇門中獎的機會一下子從三分之一提高爲三分之二，聰明的你，看到機會來敲門了嗎？所以，你就大大方方的說「換」吧！

生活是一連串的選擇與偶然的組合，
「百萬名車」可能帶給你狂喜、驕傲、歡樂，或是滿足？
「腳踏車」可能帶給你健康、樂趣、失望，還是怡然自得？
「換」與「不換」都是生活的一個選項：
選擇之前，你可能會有不同的期待，也可能會有不同的幻想
（筆者常常自我陶醉在分析與想像的過程之中）；
選擇之後，你可能會有不同的驚喜，也可能會有一些些的失望，
何妨用歡喜的正面態度去迎接人生不同的樣貌與際遇。
不同的選擇，可能會有不同的結果，帶給我們不同的生活樂趣，
好好去欣賞生命，享受你未知的人生吧！

遊戲還沒結束，換你選擇了！

註 1：這是 1990 年 9 月美國 Parade 雜誌上有名的專欄「Ask Marilyn」所刊登的數學題目，此專欄由 Marilyn vos Savant 執筆，她在專欄中回答讀者投書的數學問題。這道有名的「The Monty Hall Problem」是由馬里蘭州哥倫比亞地區的讀者 Craig F. Whitaker 投書提問的。

註 2：舉例來說，假設答案是「35」。第一次猜「50」，主持人回答「小一點」（剩下 1~49 可以猜）；第二次猜「25」，主持人回答「大一點」（剩下 26~49 可以猜）；第三次猜「37」，主持人回答「小一點」（剩下 26~36 可以猜，機率已經提高到約十分之一了）；第四次猜「31」，主持人回答「大一點」（剩下

31~36 可以猜）；第五次猜「34」，主持人回答「大一點」（剩下 35 和 36 可以猜，機率已經提高爲二分之一）；第六次或第七次即可準確猜中「35」了。根據筆者實際教國小學生測試，通常都可以在第七次或第八次猜中，約花費 20 到 25 秒左右。根據指數原理，$2^7=128>100$，理論上最多「七次」以內一定可以猜中，根本不必怕命中率只有百分之一的假象。如果電視節目裡的來賓也能學會這個方法，要猜中數字就變成是輕而易舉的事呀！

註 3：更精確地說，「假如 B 已經發生而 A 又同時發生」的機率，應該等於「假如 A 已經發生而 B 又同時發生的機率」乘以「A 發生的機率除以 B 發生的機率的比率」[2]。以數學公式表示爲：$P(A \mid B)=\dfrac{P(B \mid A)\times P(A)}{P(B)}$，有興趣的讀者可以自行參考坊間有關「數理統計」的大學用書。

註 4：設 1、2、3 代表三扇門，以 C1 代表百萬名車在 1 號門後面，以 H1 表示主持人打開 1 號門。如果你選擇了 1 號門，並且決定「不換」，則贏得百萬名車的機率是：

$$
\begin{aligned}
P(\text{不換}) &= P(C1\text{且}H2)+P(C1\text{且}H3)\\
&= P(C1)\times P(H2 \mid C1)+P(C1)\times P(H3 \mid C1)\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

註 5：設 1、2、3 代表三扇門，以 C1 代表百萬名車在 1 號門後面，以 H1 表示主持人打開 1 號門。同樣地，如果你選擇了 1 號門，同時決定「換」，則贏得百萬名車的機率是：

$$
\begin{aligned}
P(\text{換}) &= P(C2\text{且}H3)+P(C3\text{且}H2)\\
&= P(C2)\times P(H3 \mid C2)+P(C3)\times P(H2 \mid C3)\\
&= \frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 1\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

【參考文獻】

[1].決勝 21 點，電影。贏遍賭城，班・麥茲瑞區著、紀華、季思聰譯，皇冠出版，2005 年。

[2].醉漢走路，曼羅迪諾著、胡守仁譯，天下文化出版，2009 年。

[3].Division of HIV/AIDS, Centers for Infectious Diseasea, HIV/AIDS Surveillance Report（Atlanta: Center for Disease Control, January 1990）.

[4].統計學的世界，墨爾著、鄭惟厚譯，天下文化出版，2002 年。