「是」、「不是」都不是

"To be, or not to be: that is the question"
《William Shakespeare, Hamlet》

莎士比亞在《哈姆雷特》中的名句，描寫陷於瘋狂邊緣的哈姆雷特王子，面臨兩難的抉擇。不論在現實的生活或是戲劇上，兩難的劇碼時會出現，而常被引用。但用這句來形容精準的數學，一定會讓人覺得唐突。在大眾的想法，數學是一門確定性的科學，不是有解，就是無解，像古希臘「三大作圖題」，困惑世人數千年，最後被證明在「尺規作圖」下，無法完成。這是數學難題的典範，雖然一時無法解決，但大多數的數學家相信未來答案一定是「對」或「錯」兩者之一，沒有其他選項，德國數學家希爾伯特(圖一)（Hilbert, 1862-1943）就持這種看法。他在接受哥尼斯堡榮譽市民的講演中，以一句話道出這種想法：「我們一定要知道，我們必將會知道 (Wir müssen wissen, wir werden wissen.)」。對數學深具信心的人，應該也會認同他的另一句話:「在數學中，並沒有『我們永遠不會知道的』。」數學問題的最後，應該以「我們必將會知道」做結局，如果現在不知道，只是時機未到。在數學的世界裡，「是」或「不是」從來不是問題，總有一天會水落石出，這是數學家的信仰。數學就如金庸的武俠世界裡，可破解所有門派劍法的獨孤九式神功(圖二)，任何難題終會敗在數學手下，但果真如此嗎？

圖一：Hilbert對數學的發展充滿信心。圖片來源：http://zh.wikipedia.org/zh-tw/David_Hilbert。

圖二：真有可破解所有門派的絕世奇功嗎？圖片來源：Microsoft word 的美工圖案。

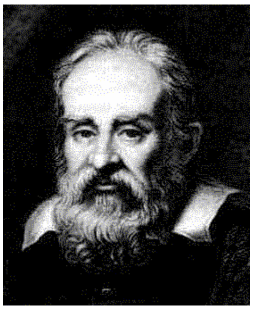
集合論面對無窮

要回答樂觀的預言是否會成立，先要談一下集合論的發展，數學歷史的發展，讓這兩者重疊在一起。德國數學家康特爾(Cantor, 1845~1918)因為研究三角級數，牽涉到無窮的概念，進而討論到數的集合理論。自亞里斯多德(Aristotle, B.C.384~322)以來，早已知道無窮有等級之分，而伽利略(圖三)(Galileo , 1564~1642)研究自由落體，得到大家都非常熟悉的公式：$s=\frac{1}{2}gt^2$。他從中得到靈感，將自然數與其平方對應：

A：1,　2,　3, …. n, ….

B：1^2,　2^2,　3^2, …. n^2 ,…

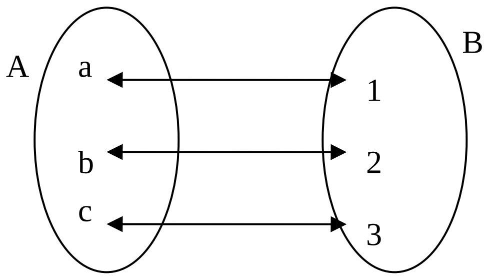
意外發現A(自然數全體)竟然能與B(自然數平方數全體)一個一個對應，而**B**是A的一部份，違背「全體大於部份」的常理，他疑惑不解，但沒有再進一步探討，只是避開無窮的議題。尤拉(Euler,1707~1783)、高斯(Gauss, 1777~1855)、柯西(Cauchy,1789~1857)等數學家也都知道無窮有差別，但都沒深入探討。



圖三：Galileo從自由落體的公式，對無窮產生質疑，但未進一步討論。圖片來源：

http://www.phys.ncku.edu.tw/~astrolab/mirrors/apod/ap980913.html。

康特爾利用伽利略的對應(correspondence)概念，特別是 **1-1 對應**(one- to -one correspondence)，而所謂的 1-1 對應，如圖四所示，即為：A中的每一個元素，在B中恰有一個元素與之對應，反之亦然。康特爾將這種 1-1 對應的觀念，擴展到元素個數是「無窮」的集合，只要任兩個集合之間存有 1-1 對應，就認定兩者的元素個數相同。而集合的元素個數，稱為集合的基數(cardinal number)，只要兩個集合能 1-1 對應，則兩個集合的基數相等。



圖四： 1-1 **對應**，兩集合基數相同(資料來源：自繪)

集合依據元素個數分成兩類，一是個數有限的有限集合(finite set)，另一類則是個數無窮的無限集合(infinite set)。在康特爾之前的雖知道無窮可能有不同，但卻接受所有無窮是一樣大小的假設。康特爾以所有自然數所形成的無窮集合(即$\{1,2,3,4,5,6,.......\}$，一般以N表示)為基礎，若一個無限集合能與N形成 1-1 對應，則稱為為「可數無窮集」(countably infinite set)，兩者基數相等，並以$\aleph_0$(讀作

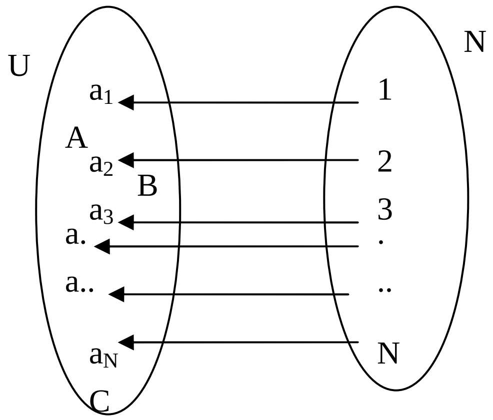
aleph-null)代表N的基數。而其他無法和自然數集N形成 1-1 對應的無限集合就稱「不可數無窮集」(uncountably infinite set)，其基數大於$\aleph_0$，整理於表一。

表一：集合的分類

元素個數	有限	無限多個	
例子	$\{1,2,3,4,5\}$	N(自然數集)	R(實數集)
基數	5	$\aleph_0$	大於$\aleph_0$
名稱	有限集合	可數無窮集	不可數無窮集

資料來源：自行整理

不可數無窮集的基數大於$\aleph_0$，即自然數集中的每一個不同的數都可以對應到不可數無窮集的不同元素，但是不可數無窮集中會有元素沒有自然數可以與之對應，這種無法 1-1 對應的情況，如圖五所示，U 的基數較大，不可數無窮集元素的數目要比自然數集 N 的元素個數「多」。



圖五：非 1-1 對應，U 之基數大於 N 之基數(資料來源：自繪)

康特爾(圖六)利用 1-1 對應與基數的概念，證明了實數的基數大於自然數的基數，確認了無窮有等級之分。而且其理論肯定伽利略的猜測：「自然數全體」與「自然數平方的全體」，是「一樣多」，打破自《幾何原本》以來，部分小於全體的認知，是數學史上第一個攻克這項無窮議題的數學家。

圖六：Cantor 確認在無窮的領域裡，部分可能和全部一樣「多」。圖片來源：

http://episte.math.ntu.edu.tw/people/p_cantor/index.html

連續統假設

康特爾雖然利用集合論解決了前輩對無窮的一些質疑，但卻也衍伸出新問題——「連續統假設」(continuum hypothesis)，描述如下：

1. 一個集合所有子集所成的集合，稱為冪集合(power set)，**其基數大於原集合**。例如：A={1,2}，則其冪集合以 2^A 表示，且 $2^A=\{\{1\}, \{2\},\{1,2\},\phi\}$，其中 ϕ 表示空集合，為沒有元素的集合，2^A 的基數大於A的基數。
2. 自然數集的基數為 $\aleph_0$，而實數集的基數大於 $\aleph_0$，以 c 表示。由 1 知自然數集的冪集合的基數，以 $2^{\aleph_0}$ 表示必大於 $\aleph_0$，並且可以證明 $2^{\aleph_0}=c$。
3. 連續統假設是認為在 $\aleph_0$ 與 c 之間，沒有其他的集合大小，也就是說 $\aleph_0$ 的下一個基數就是 c，兩者之間是「連續」的，沒有其他的基數，如圖七。

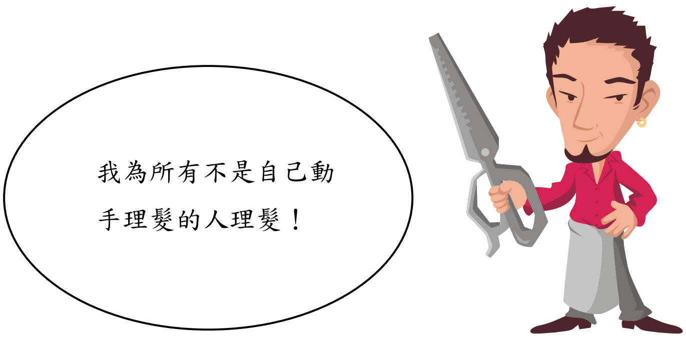
$$\aleph_0 \xrightarrow{\text{中間沒有其他基數}} c = 2^{\aleph_0}$$

圖七：**連續統假設**：$\aleph_0$ 的下一個基數為 c（資料來源：自行繪製)

康特爾一直想證明連續統假設是正確，卻無法完成。從集合論所導出的問題，無法在集合論內解決，讓一些原本對集合論有意見的學者，更加無法信服!

失樂園—悖論(paradox)的出現

連續統無法被證明或否證，對樂觀的數學家，不是大問題，因為「終將會知道」。可是集合論為數學解決無窮的難題，而創造了新樂園，因此希爾伯特在 1900「國際數學家大會」上提出 23 個著名的數學問題，列名第一的，就是「連續統」的問題，顯示它的重要。但悖論的出現，讓數學家非常困惑。所謂的悖論，就是會推出矛盾的敘述，無法認定這個敘述是真或是假。以羅素(Russel, 1872~1970)的「**理髮師悖論**」(barber paradox)為例：



圖八：**理髮師悖論**。如果他爲自己理髮，則他不能爲自己理髮(他爲所有「不是自己動手」理髮的人理髮)；但若不自己理髮，則他就得爲自己理髮。很明顯，「理」與「不理」，都陷入矛盾之中。(圖片來源：Microsoft word 的美工圖案。)

這個悖論是羅素根據康特爾在 1899 年寫給戴德金(Dedekind, 1831~1916)的信中，討論「**所有集合所成的集合**」的悖論轉換出來的，這個悖論描述於下：

假設 D 集合包含所有的集合。

D 有沒有包含自己？
- 有 → 有一個新的集合，不包含在 D 裡，與 D 包含所有集合矛盾。
- 沒有 → 則 D 沒有包含所有的集合，因爲至少 D 這個集合沒有被包含在內。

圖九:「所有集合所成的集合」悖論。資料來源：自行整理。

諸如此類的悖論不斷的出現，讓數學家應接不暇，歸根究底，關鍵在於康特爾對**集合的定義並不明確**，允許包含自己的集合。

公設化集合論

為了避免這類悖論的出現，數學家開始將集合論公設化，而康特爾所發展未公設化的集合論，就稱為「**樸質的集合論**」(naïve set theory)，以別於後續發展的公設化集合論。公設可視為一系列存而不證的假設，所以公設越少越好。而若有一條公設，能夠由其他的公設所導出，則這條公設就是多餘的，因此公設之間是互相獨立的。哲美羅(Zermelo, 1871~1953)於 1908 年開始先鋒的工作，後來由弗朗克爾(Fraenkel, 1891~1965)於 1922 年加以改進，後來世稱為ZF集合論公設系統，其中包含了：$x \notin x$ **的這一條公設，強調一個集合不能包含本身**，如此避開了「所有集合所成集合」的悖論，而且迄今尚未發現新的悖論，但也沒有人能證明這套系統不會導出悖論來。

希爾伯特計劃(Hilbert program)

集合論的悖論，讓數學家感到一致性(consistency)的重要，簡單的說，就是不能推論出矛盾的結果，一致性的系統，不會產生悖論。希爾伯特雖然不主張將數學基礎建立在集合論，但他接受無窮的概念，為了達到他於 1925 年的論文所言「不能再發生悖論，也永遠不會再發生」，提出每門數學都有自己的邏輯、概念、公設、推導法則、定理，公設不一定要有實體物對應的內涵，並建議由公設出發，經由有限步驟的邏輯推論，將數學形式化成公設化的邏輯演繹系統，讓證明與問題都能有精確的描述。希望經由形式化後，能證明系統的一致性，最終能證明數學內在的一致性，這就是「**希爾伯特計劃**」。除此之外，他還自信能一併解決完備性（completeness）的問題，即任何有意義的敘述都是可以被證明或否證，所以「我們一定要知道，我們必將會知道」！

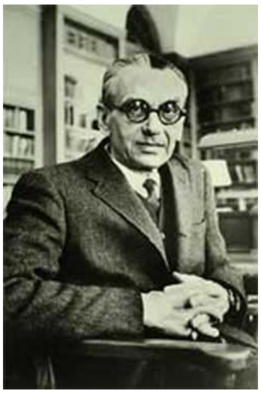
表二：**希爾伯特計劃**

目的	讓數學成爲一致性的系統	讓數學具有完備性
意義	不會推論出矛盾的結果	有意義的敘述都是可以被證明或否證
目標	悖論不再出現	我們一定要知道，我們必將會知道

資料來源：自行整理。

哥德爾不完備定理(Incompleteness Theory)

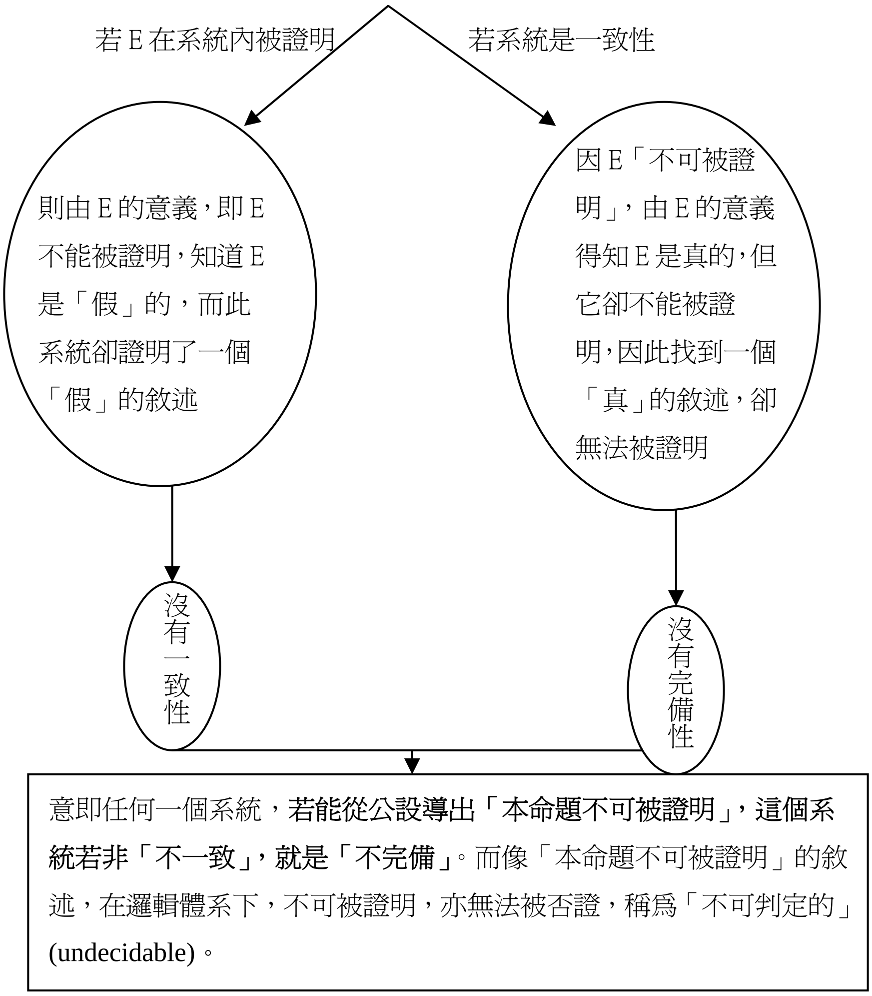
但哥德爾(圖十)（Gödel, 1906~1978）於 1931 年發表的「不完備定理」，希望被殲滅了！



圖十：Gödel 提出不完備定理，對希爾伯特計劃是一致命的打擊。圖片來源：

http://plus.maths.org/issue39/features/dawson/

哥德爾在希爾伯特所稱的公設系統下，可以導出代表「本命題不可被證明」的邏輯運算形式的式子。為方便說明，我們稱「本命題不可被證明」的敘述為E，不完備定理主要概念說明如下：



圖十一：不完備定理說明圖：在希爾伯特所稱的公設系統下，可以導出「本命題不可被證明」，顯示系統不是不完備就是沒有一致性。資料來源：自行整理。

不完備定理的衝擊

沒有一致性，無法保證悖論不會再現；沒有完備性，有意義的敘述，不一定能證明或否定，還有不可判定的可能，亦即還有「此命題無法被證明為假」或「此命題無法被證明為真」。如連續統的假設，希爾伯特認為只有「是」或「不是」，但哥德爾於 1936 證明在現有系統下無法證明它為「假」，而 1963 年柯恩(Cohen,1934~2007)證明在現有系統下無法證明它為「真」，亦即連續統假設是「不可判定的」。

很多數學家失望，即使到了1980，數學家克萊因(Kline,1908~1992)還寫了一本書名為《數學—確定性的失落(Mathematics：The Loss of Certainty)》，提到當時尚未解決的「費馬最後定理」(Fermat's last theorem：$x^n + y^n = z^n$，n為大於2的自然數時沒有整數解)，可以考慮不可判定的方向，從書名到內容，讓人感覺希爾伯特的豪情，灰飛煙滅了。

結語

雖然數學不像希爾伯特所想像的完美，但英國數學家懷爾斯(Wiles,1953~)發表在1995年《數學年刊》(Annals of mathematics)的兩篇論文，證明了「費馬最後定理」,「我們真的知道了」！而1904提出的拓樸學著名難題「龐加萊猜想(Poincare conjecture)」，在 2006年幾組數學家的努力驗證與補充下，確定攻克了。所以數學的發展並沒有因此而停頓，還是不斷的前進！以往對一個數學命題，會想辦法證明或找反例否證，現在只是多了另一條路，它可能是「不可判定的」。在證明與否證的過程中，數學家的努力，就足以讓數學知識不斷的累積，更可能碰不到不可判定的數學問題，如果「不幸」碰到了，應該講「幸運」才對，會名留青史，而無論是幸與不幸(不可判定？！)，「是」與「不是」不再是唯一的道路了!